

Lehre in der Mathematik

Thesen

- Mathematik wird traditionell sehr rechenlastig unterrichtet. Mathematische Begründungen sind Ergebnis eines kreativen Prozesses.
- Zu Beginn allen Lehrens müssen operationalisierbare **Lernziele** formuliert werden.
- **Aktives Lernen** zeigt im Großen und Ganzen nachhaltigere Erfolge als passives Lernen – Frontalunterricht ist nicht per se schlecht.
- Bei der Umsetzung des Prinzips der minimalen Hilfe agieren Lehrende als unterstützende **Lerncoaches** und weniger als erklärende Expert*innen. Lernzielkontrollen sollten auch **zwischen**durch und nicht erst nach der Veranstaltung genutzt werden.
- Auch in der Mathematik bewähren sich eher ungewöhnliche Aufgabentypen höherer **Kompetenzstufen**.

Schön, dass Sie vorbeischaun und sich nicht vom Wort „Mathematik“ haben abschrecken lassen.

Wie können wir in mathematisch orientierten Fächern erreichen, dass unsere Studierenden am Ende unserer Veranstaltung mehr als nur auswendig gelerntes Faktenwissen erworben haben? Im Folgenden gebe ich Ihnen Anregungen und zeige Ihnen Beispiele aus meiner Lehrpraxis.

Lassen Sie sich inspirieren – es lohnt sich!

Was macht Mathematik eigentlich so speziell?

„Mathe war nie so mein Ding“ – wie oft höre ich diesen Satz in den verschiedensten Variationen und Situationen. Warum eigentlich? Was macht Mathematik so speziell?

In der Schule – und in manchen Anwendungsfächern auch an der Hochschule – wird Mathematik traditionell sehr rechenlastig unterrichtet. In der Folge lernen die Studierenden eher „Kochrezepte“ auswendig und achten weniger auf das Verständnis größerer Zusammenhänge. Vielleicht haben auch Sie noch drei verschiedene Formeln für die Zinseszinsrechnung gelernt, die im Prinzip doch alle dieselbe Gleichung sind ...

Ein weiteres Problem besteht darin, dass alles aufeinander aufbaut und miteinander verwoben ist. Zudem können mathematische Aussagen nur dann verwendet werden, wenn sie schlüssig begründet („bewiesen“) sind. Solche Begründungen zu entdecken ist (auch) ein kreativer Prozess, bei dem zu Beginn nicht immer klar ist, welche Herangehensweise zum Ziel führt.

Was sind geeignete Lernziele in den verschiedenen Kompetenzstufen?

Zu Beginn allen Lehrens steht die Frage nach den **Lernzielen**: Was sollen meine Studierenden nach meiner Veranstaltung können? Lerntheoretisch werden die Lernziele in verschiedene Kompetenzstufen eingeteilt:



Abbildung 1: Lernzieltaxonomie nach Anderson, Lorin W.; Krathwohl, David R. (2001): *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing*.

Aber Achtung – das Wort „Verstehen“ trägt hier eine andere Bedeutung als im allgemeinen universitären Umfeld! Es steht für das Erklären oder Beschreiben von Sachverhalten und Konzepten in eigenen Worten und *nicht* für das allumfassende Verinnerlichen einer ganzen Theorie.

Ich rate Ihnen, Ihre Lernziele so konkret zu formulieren, dass sich aus ihnen unmittelbar Prüfungsfragen zur Lernzielkontrolle ergeben (*operationalisierbare Lernziele*). Die folgenden Lernziele zum Thema „Funktionsuntersuchung“ unterscheiden sich teilweise nur in Nuancen, die die verschiedenen Kompetenzstufen widerspiegeln.

Beispiele für die Formulierung von Lernzielen

Die Studierenden sollen

- die Definition des Begriffs „Ableitung einer Funktion“ wiedergeben können [Erinnern]
- den Begriff „Ableitung einer Funktion“ anhand einer Skizze erläutern können [Verstehen]

- die Ableitung einer gegebenen Funktion berechnen können [Anwenden]
- die für die Ableitung einer gegebenen Funktion notwendigen Formeln angeben können [Analysieren]
- eine gegebene Berechnung einer Ableitung auf ihre Korrektheit hin überprüfen können [Evaluieren]
- eine Unterrichtseinheit zum Thema „Ableitung von Funktionen“ entwickeln können [Erschaffen]

Mit welchen Lehrformen können Sie nachhaltiges Lernen unterstützen?

In der Lernpsychologie ist seit langem bekannt, dass **aktives Lernen** im Großen und Ganzen nachhaltigere Erfolge zeitigt als passives Lernen. Ich möchte dabei „im Großen und Ganzen“ betonen, denn für einzelne Lehrsequenzen kann ein **Vortrag**, eine Präsentation oder eine Videosequenz durchaus das Mittel der Wahl sein – Frontalunterricht ist nicht per se schlecht.

Wenn Sie Ihre Studierenden zum aktiven Lernen anregen wollen, stellt sich sofort die Frage, wie Sie dies unterstützen können. Ich möchte Ihnen drei Aspekte hierzu vorstellen und bewusst machen.

Aktives Lernen macht keinen Spaß

Die schlechte Nachricht zuerst: aktives Lernen macht leider keinen Spaß. Lernpsychologisch hat dies (auch) damit zu tun, dass uns zwei Systeme zur Entscheidungsfindung zur Verfügung stehen, ein schnelles automatisches (*System 1*) und ein langsames anstrengendes (*System 2*); vgl. Kahneman, Daniel (2011): *Thinking, Fast and Slow*. Aktives Lernen geschieht mit System 2, und die Inbetriebnahme dieses Systems erfordert bewusste Anstrengung. Versuchen Sie einmal, die Rechenaufgaben $3 \cdot 4$ und $17 \cdot 28$ möglichst schnell im Kopf zu lösen, und Sie werden den Unterschied „am eigenen Kopf“ erfahren ...

Die folgende Grafik veranschaulicht die Ergebnisse einer Studie, bei der zwei

Studierendengruppen denselben Stoff (Fluidodynamik) erlernen sollten; dabei lernte eine Gruppe passiv (hellgraue Balken), die andere aktiv (dunkelgraue Balken). Im abschließenden Test schnitt die aktive Gruppe erwartungsgemäß signifikant besser ab (*Test of learning*). Die wesentlichen neuen Erkenntnisse der Studie werden aber durch die folgenden Balken beschrieben – machen Sie sich einmal in aller Deutlichkeit klar, was dies für Ihre eigene Lehre bedeutet! In meinen eigenen Veranstaltungen gehe ich manchmal auf die Metaebene und zeige und erläutere meinen Studierenden genau diese Grafik.

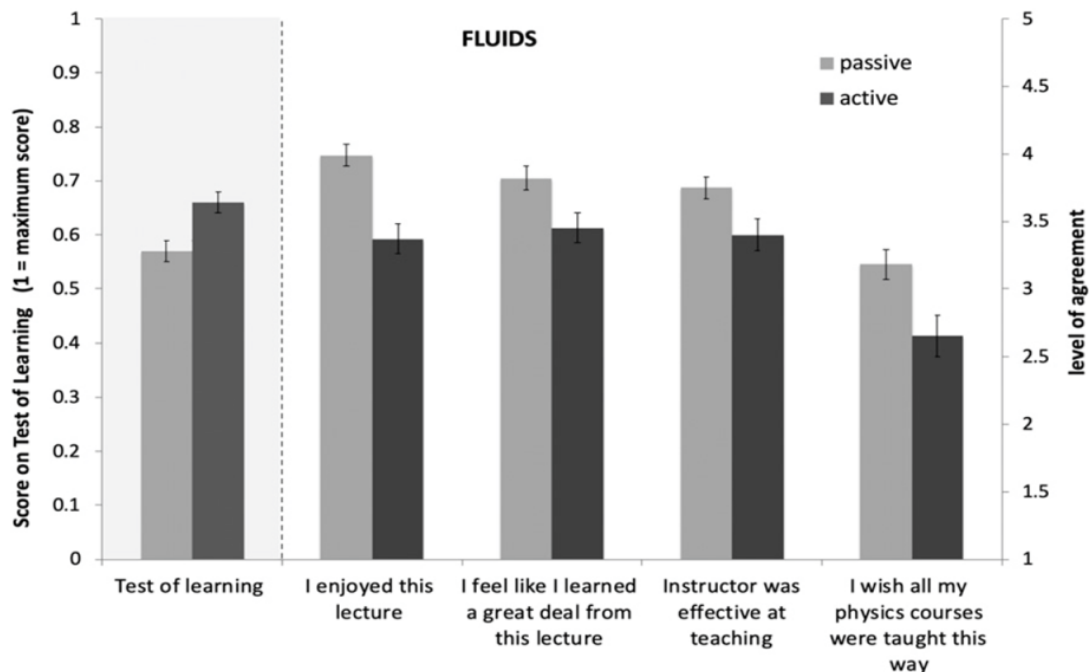


Abbildung 2: Vergleich von Studierendenantworten zu aktivem und passivem Lernen. Quelle: Deslauriers, Louis; McCarty, Logan S.; Miller, Kelly; Callaghan, Kristina; Kestin, Greg (2019): *Measuring actual learning versus feeling of learning in response to being actively engaged in the classroom.*

Das Prinzip der minimalen Hilfe

Formuliert ist das Prinzip der minimalen Hilfe sehr schnell:

Geben Sie immer nur so viel Hilfe wie gerade nötig.

Intellektuell verstehen Sie dieses Prinzip sicher sofort. Die Umsetzung in die Praxis stellt aber hohe Ansprüche an Sie als Lehrperson, weil Sie teilweise entgegen den Wünschen der

Studierenden (und Ihren eigenen) agieren müssen.

An einem Beispiel möchte ich Ihnen das Prinzip verdeutlichen. Stellen Sie sich vor, Ihre Studierenden sollen folgende Gleichung nach x auflösen (die Lösung ist übrigens $x = 2$):

$$2x+1=x+3$$

Es stört dabei das x auf der rechten Seite. Im traditionellen erklärenden Unterricht können Sie das Problem schnell lösen, etwa mit dem folgenden fiktionalen Dialog zwischen Tutor*in (T) und Student*in (S):

S: Ich bräuchte mal Hilfe, ich weiß nicht, wie ich anfangen soll.

T: Wo genau liegt denn dein Problem?

S: Ich soll die Gleichung nach x auflösen, aber das x kommt ja auf beiden Seiten vor.

T: Da musst du einfach auf beiden Seiten x abziehen. Dann hast du die Gleichung $x+1=3$ mit der Lösung $x=2$.

S: Ja klar, vielen Dank; ist ja ganz leicht.

Die konkrete Fragestellung ist damit zwar beantwortet, aber es bliebe abzuwarten, ob S bei der nächsten Aufgabe erfolgreicher wäre. Unter Berücksichtigung des Prinzips der minimalen Hilfe könnte der Dialog (dessen Anfang derselbe ist wie oben) vielleicht so aussehen:

S: Ich bräuchte mal Hilfe, ich weiß nicht, wie ich anfangen soll.

T: Wo genau liegt denn dein Problem?

S: Ich soll die Gleichung nach x auflösen, aber das x kommt ja auf beiden Seiten vor.

T: Wenn das x nicht mehr da wäre, könntest du die Aufgabe dann lösen?

S: Ich denke schon.

T: Also müssen wir das x irgendwie eliminieren. Versuch mal, eine Idee dafür zu entwickeln.

[T lässt S allein weiterarbeiten und kehrt nach 3 Minuten wieder zurück.]

T: Bist du weitergekommen?

S: Nicht so richtig.

T: Was hast du dir denn überlegt? Und an welcher Stelle hakt es noch?

S: Ich würde gerne auf beiden Seiten x abziehen, aber ich weiß nicht, ob ich das darf; schließlich ist x eine Variable und keine Zahl.

T: Aber wenn das ginge, wärst du fertig?

S: Ja, dann wäre die Lösung $x=2$.

T: Also musst du nur noch diesen Schritt rechtfertigen. Schau vielleicht nochmal deine Mitschrift aus der Vorlesung an.

[T lässt S wieder allein und kommt später wieder vorbei.]

T: Und?

S: Wir hatten tatsächlich in der Vorlesung ein ähnliches Beispiel gemacht, wo wir auf beiden

Seiten x abgezogen haben. Für mich ist jetzt alles klar.

T: Perfekt, dann hast du die Aufgabe vollständig und korrekt gelöst.

Hier agiert T also eher als unterstützende*r Lerncoach und weniger als erklärende*r Expert*in.

Das Prinzip der minimalen Hilfe bringt natürlich Vor- und Nachteile mit sich:

Vorteile	Nachteile
<ul style="list-style-type: none"> · Unterstützt prozedurales Lernen · Erzeugt aktives Lernen · Ermöglicht nachhaltigen Lernerfolg · Erlaubt individuelle Förderung 	<ul style="list-style-type: none"> · „Kostet“ Zeit · Ist bei Studierenden eher unbeliebt · Ist anspruchsvoll in der Umsetzung

Lernzielkontrolle zwischendurch

Nach dem Ende der Veranstaltung kommen die Prüfungen, mit denen wir überprüfen, ob unsere Lernziele tatsächlich erreicht wurden. Warum eigentlich erst nach der Veranstaltung?

Ich plädiere dafür, auch zwischendurch schnelle **Lernzielkontrollen** durchzuführen. Dies dauert mit Online-Tools wie z.B. **Mentimeter** wirklich nur wenige Minuten, egal ob mit 10 oder 400 Studierenden. Wenn Sie Ihre Lernziele hinreichend konkret formuliert haben, sind passende Fragen für eine kurze Lernzielkontrolle schnell erstellt, und die Auswertung kann online in Echtzeit gemeinsam mit den Studierenden erfolgen.

Wie können Sie kompetenzorientierte Aufgaben entwickeln?

Im Folgenden stelle ich Ihnen drei für mathematische Veranstaltungen eher ungewöhnliche Aufgabentypen höherer Kompetenzstufen vor, die sich in meiner Lehrpraxis bewährt haben.

Reflexionsaufgabe

An der Hochschule schauen wir oft nach vorne und nehmen uns seltener die Zeit zurückzuschauen. Doch erst der systematische Rückblick bettet das neu erworbene Wissen in bestehende kognitive Muster ein und ist daher unerlässlich für nachhaltiges Lernen. Hierfür habe ich die Reflexionsaufgabe entwickelt (vgl. Zeidler, Sandra; Siburg, Karl Friedrich (2008)).

Das folgende Beispiel entstammt einer Vorlesung für das 2. Semester; das Ziel der Aufgabe wird den Studierenden zu Beginn klar kommuniziert.

>>Ziel der Aufgabe ist es, die Theorie hinter der Berechnung von Extrema unter Nebenbedingungen zu reflektieren, die wichtigsten Sätze zu wiederholen und Bezüge zwischen den einzelnen Begriffen herzustellen.

1. Fertigen Sie eine Mindmap an, in der Sie alle relevanten Begriffe (Mannigfaltigkeit, Tangentialraum, Normalraum, etc.) mit ihren Definitionen und zentralen Aussagen berücksichtigen. Deuten Sie Beziehungen zwischen einzelnen Aspekten durch beschriftete Pfeile an.
2. Schreiben Sie auf Grundlage Ihrer Mindmap einen kurzen zusammenhängenden Text, der zentrale Definitionen und Sätze sowie einfache Beispiele enthält. Schreiben Sie insgesamt 1-2 Seiten.<<

Erfahrungsgemäß tun sich die Studierenden zunächst schwer mit diesem Aufgabentyp. Nach wenigen Durchgängen jedoch steigen die Qualität der Bearbeitungen sowie die Akzeptanz seitens der Studierenden deutlich an.

„Forumsaufgabe“

Im folgenden Aufgabentyp, den ich „Forumsaufgabe“ genannt habe, sollen Fehlvorstellungen erkannt, analysiert und korrigiert werden. Diese Art von Aufgabe ist erfahrungsgemäß sehr anspruchsvoll.

>>In einem Forum lesen Sie folgenden Beitrag:

„Ich bin total verwirrt. Wenn ich etwas von einer Zahl abziehe, wird diese immer kleiner. Jetzt sollen wir die Gleichung $3-x=5$ lösen. Aber 5 ist ja größer als 3. Das geht dann doch gar nicht, oder?“

Formulieren Sie für das Forum eine präzise Antwort.

Die Fehlvorstellung besteht in der Annahme „Wenn ich etwas von einer Zahl abziehe, wird diese immer kleiner“, die nur für positive Subtrahenden zutrifft; hier ist aber $x = -2$. <<

Metafachliche Aufgabe

Auch metafachliche Kompetenzen sind wichtig. Gerade beim Übergang von der Schule zur Hochschule erfahren die neuen Studierenden zahlreiche Schwierigkeiten, die durchaus auch auf die unterschiedlichen Lernkulturen zurückzuführen sind.

Die neuen Studierenden sind vor allem oft nicht in der Lage, sich unbekanntem Stoff selbstständig anzueignen. Wir betonen zwar in den Anfangsvorlesungen immer wieder die Notwendigkeit des eigenständigen Nacharbeitens, zeigen aber nicht auf, was dies bedeutet und wie dies durchzuführen ist.

Hier setzt die folgende Aufgabe an, die als Präsenzaufgabe für die erste Übungsstunde des 1. Semesters gestellt wurde (80 Minuten Bearbeitungszeit).

>>Wenn Sie Ihre persönliche Mitschrift von Abschnitt 1.1 der Vorlesung durchgehen, werden Sie bemerken, dass sie viele Lücken enthält. Einerseits hat der Dozent manchmal ganze Teile von Beweisen ausgelassen (und dies auch offen gesagt), andererseits gibt es Aussagen, Gleichungen o.Ä., die zwar beim ersten Lesen klar erscheinen, beim zweiten Nachdenken aber zusätzlicher Argumente bedürfen.

Ihr Ziel in dieser Aufgabe ist es, eine lückenlose Ausarbeitung des Abschnitts 1.1 zu erstellen. Gehen Sie dabei anhand folgender Schritte vor:

1. In welchen Beweisen sind ganze Teile vom Dozenten ausgelassen worden?
2. An welchen scheinbar klaren Stellen müssen zusätzliche Argumente hinzugefügt werden?
3. Beweisen Sie die von Ihnen im ersten Schritt identifizierten fehlenden Teile.
4. Fügen Sie die fehlenden Argumente an den von Ihnen im zweiten Schritt identifizierten Stellen hinzu.
5. Sie haben nun neben den Folien Ihre Originalmitschrift mit den von Ihnen erstellten Ergänzungen. Gehen Sie alles zusammen noch einmal durch und prüfen Sie, ob diese Kombination wirklich eine mathematisch lückenlose Ausarbeitung ist.<<

Wenn ich Kolleg*innen diese Aufgabe zeige, erhalte ich manchmal den Kommentar „Dafür habe ich leider nicht die Zeit“. Nachhaltiges Lernen „kostet“ aber Zeit und erfordert dadurch fachliche

Stoffreduktion.

Es kommt immer auf Ihre individuellen Prioritäten an – Sie entscheiden, was wichtig ist.

Meine persönlichen "Geheimtipps"

Zum Abschluss möchte ich Ihnen drei persönliche Anregungen mit auf Ihren Weg geben, die sich umso klarer herauskristallisiert haben, je länger ich an der Hochschule unterrichtete.

Die drei Fragezeichen

Stellen Sie sich ab und zu – vielleicht auch still mitten in der Stunde – folgende drei Fragen:

- Was tue ich gerade?
- Warum tue ich das?
- Was will ich damit erreichen?

Wenn Sie sich diese Fragen später selbst ehrlich beantworten, sind Sie auf einem guten Weg.

Transparenz schafft Akzeptanz

Wenn ich den Studierenden gegenüber meine Ziele und Anforderungen immer transparent mache, werden meine Handlungen von den Studierenden eher akzeptiert und anerkannt. Das heißt übrigens *nicht*, dass sich meine Studierenden dafür begeistern...

Unnötigen Stress vermeiden

Ich bin durchaus ein Freund von Stress, solange er meine Studierenden zu guten Leistungen anspricht. Unsere Studierenden erfahren aber auch viel unnötigen Stress – diesen versuche ich in meiner Lehre zu vermeiden, indem ich z.B. vor mündlichen Prüfungen auf einem Merkblatt meine Anforderungen und den Prüfungsablauf transparent mache.

Literatur

Anderson, Lorin W.; Krathwohl, David R. (2001): *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing*. Addison Wesley Longman Inc.

Deslauriers, Louis; McCarty, Logan S.; Miller, Kelly; Callaghan, Kristina; Kestin, Greg (2019): *Measuring actual learning versus feeling of learning in response to being actively engaged in the classroom*. In: Proceedings of the National Academy of Sciences, Jg. 116, Nr. 39, S. 19251-19257.

Kahneman, Daniel (2011): *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus and Giroux.

Zeidler, Sandra; Siburg, Karl Friedrich (2008): *Um was geht's hier eigentlich? Methoden zur Reflexion größerer Themenkomplexe in mathematischen Studiengängen*. In: Neues Handbuch Hochschullehre. Franz Steiner Verlag. C 2.14.

Autor*in

Prof. Dr. Karl Friedrich Siburg, Fakultät für Mathematik, Technische Universität Dortmund. Promotion an der ETH Zürich. Habilitation an der Ruhr-Universität Bochum. Forschungsaufenthalte u.a. in England, Frankreich, Israel, Kanada, Mexiko, USA. Seit 2007 in der Hochschuldidaktik als Trainer und Coach sowie Autor für hochschuldidaktische Journale tätig, karlfsiburg